Oscillateur électrique forcé

Un circuit RLC est à l'origine d'oscillations des grandeurs électriques. Lorsque, de plus, on applique une tension sinusoïdale à l'ensemble du circuit, on parle d'oscillateur **forcé**, par opposition à libre.

Ce nouveau modèle nécessite de clarifier comment la fréquence de la tension sinusoïdale influence le circuit RLC, et notamment la charge aux bornes du condensateur ou le courant qui traverse le trois dipôles R, L ou C. On exhibe alors un phénomène physique nouveau : la **résonance**. Ce phénomène correspond à une réponse maximale de l'oscillateur à une excitation, en termes de charge, d'intensité ou de transfert d'énergie.

Olivier Ky Thiêp CHOFFRUT-PHAN

2024-2025

Plan du cours

Formulaire de physique

Oscillateur électrique forcé

Formules mathématiques

Nombres complexes

$$\underline{r} = r_m e^{j\theta} \qquad \text{avec} \qquad j^2 = -1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} |\underline{r}| = r_m \ \text{(module)} \\ \arg\big(\underline{r}\big) = \theta \ \text{(phase)} \end{cases}$$

$$\theta = \arg\big(a + jb\big) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right), \ \text{si} \ a > 0 \\ \pi + \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right), \ \text{si} \ a < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = a_0 \cos{(\omega t)} \\ b = b_0 \cos{(\omega t + \varphi)} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \underline{a} = a_0 \ e^{j\omega t} \\ \underline{b} = b_0 \ e^{j(\omega t + \varphi)} \end{cases} \Longrightarrow < ab >= \frac{1}{2}\Re\big(\underline{a} \cdot \underline{b}\big) = \frac{a_0 b_0 \cos\varphi}{2}$$

Grandeurs et constantes physiques

Ordres de grandeurs

$$R \sim 10^3 \ \Omega \qquad L \sim 10^{-3} \ \text{H} \qquad C \sim 10^{-9} \ \text{F}$$

Formules physiques

Lois de comportement des dipôles

Expression

$$u_R(t) = Ri(t) \ \text{(résistance)} \qquad u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} \ \text{(bobine)} \qquad u_C(t) = \frac{q(t)}{C} \ \text{(condensateur)}$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

Oscillateur harmonique

Equations

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{q}{LC} = 0 \qquad \text{(oscillateur libre amorti)}$$

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{q}{LC} = \frac{E}{L}\cos(\omega t) \qquad \text{(oscillateur forcé)}$$

$$\ddot{q} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{E}{L}\cos(\omega t) \qquad \text{(équation canonique de l'oscillateur forcé)}$$

Paramètres

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \qquad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Temps caractéristiques

$$\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{R}{L} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad T_0 = 2\pi\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Propriétés du régime permanent

$$e(t) = E\cos(\omega t) \implies q(t) = q_m\cos(\omega t + \varphi)$$

Notation complexe

$$e(t) = E\cos(\omega t) \implies \underline{e} = Ee^{j\omega t} \qquad \text{avec} \qquad j^2 = -1$$

$$q(t) = q_m\cos(\omega t + \varphi) \implies \underline{q} = q_m e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$i(t) = i_m\cos(\omega t + \psi) \implies \underline{i} = i_m e^{j(\omega t + \psi)}$$

Réponse sinusoïdale

$$\underline{q}(t) = \underline{q}_m e^{j\omega t} = q_m e^{j(\omega t + \varphi)} \quad \text{avec} \quad \underline{q}_m = \frac{\frac{E}{L}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\frac{\omega_0 \omega}{Q}}$$

$$\underline{i}(t) = \underline{i}_m e^{j\omega t} = i_m e^{j(\omega t + \psi)} \quad \text{avec} \quad \underline{i}_m = \frac{i\omega\frac{E}{L}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\frac{\omega_0 \omega}{Q}}$$

Résonance

Charge

$$\text{Seulement si } Q > \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad : \qquad \omega_{r,q} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

Intensité

$$\text{Pour toute valeur de } Q \qquad : \qquad \omega_{r,i} = \omega_0$$

Energie

$$\text{Pour toute valeur de } Q \qquad : \qquad \omega_{r,p} = \omega_0$$

Acquis des années antérieures

Collège

Arrêté du 17-7-2020 publié au BO 31 du 30 juillet 2020

Notions et contenus
Dipôles en série, dipôles en dérivation
Loi d'additivité des tensions
Loi d'additivité des intensités
Relation tension-courant : loi d'Ohm
Puissance électrique : $P = U \times I$
Relation liant l'énergie, la puissance électrique et la durée

Classe de Seconde générale

Arrêté du 17-1-2019 publié au BO spécial 1 du 22 janvier 2019

Notions et contenus	Capacités exigibles
Loi des noeuds. Loi des mailles	Explorer la loi des mailles et la loi des noeuds dans un circuit électrique comportant au plus deux mailles
Caractéristique tension-courant d'un dipôle	Exploiter la caractéristique d'un dipôle électrique : point de fonctionnement, modélisation par une relation $U = f(I)$ ou $I = g(U)$ Utiliser la loi d'Ohm

Classe de Première / Spécialité Physique-Chimie

arrêté du 17-1-2019 publié au BO spécial 1 du 22 janvier 2019

Notions et contenus	Capacités exigibles
Lien entre intensité d'un courant continu et débit de charges Puissance et énergie Effet Joule. Cas des dipôles ohmiques	Relier l'intensité d'un courant continu et débit de charges

Classe de Terminale / Spécialité Physique-Chimie
arrêté du 19-7-2019 publiés au BO spécial 8 du 25 juillet 2019

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
Intensité d'un courant électrique en régime variable	Relier l'intensité d'un courant électrique au débit de charges
Comportement capacitif	Identifier des situations variées où il y a accumulation de charges de signes opposées sur des surfaces en regard
Modèle du condensateur	Citer des ordres de grandeur de valeurs de capacités usuelles
Relation entre charge et tension Capacité d'un condensateur Modèle du circuit RLC série : charge d'un condensateur par une source idéale de tension, décharge d'un condensateur, temps caractéristique	

Pré-requis des Ecoles d'ingénieurs (voies universitaires)

Concours Universitaire des Ecoles Centrales

Néant.

Concours PASS-Ingénieur

Thèmes	**Thématiques**
Lois des circuits électriques dans l'ARQS	Association série et parrallèle Diviseur de tension et de courant Grandeurs efficaces Impédance et admittances complexes Notions d'impédances d'entrée et de sortie et admittances complexes

Concours GEI-Univ (Mines)

Thèmes	**Thématiques**
Electrocinétique	Courant électrique, loi d'Ohm, conductivité, lois de Kirchhof, régimes variables, condensateurs, selfs, impédance complexe

1. Excitation sinusoïdale d'un oscillateur

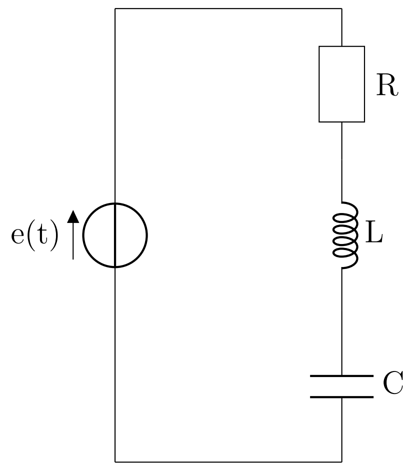
1.A. Equation électrique

On considère un circuit électrique de résistance totale R, comportant une bobine d'inductance L, un condensateur de capacité C associés en série. A l'ensemble, on applique une tension sinusoïdale, de la forme :

$$e(t) = E\cos(\omega t)$$

où E est l'amplitude et $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ la pulsation, f est la fréquence et T est la période.

Dans ce cas, on parle d'**oscillateur forcé ou excité** (par opposition à libre).



Encadré 1 : Equation de l'oscillateur électrique forcé

La loi des mailles et les lois de comportements des dipôles fournissent :

$$e(t) = u_R(t) + U_L(t) + u_C(t)$$
$$e(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}$$
$$e(t) = L\frac{d}{dt}\left(\frac{dq}{dt}\right) + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$
$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{q}{LC} = \frac{e(t)}{L}$$

Ecriture canonique

On peut écrire l'équation électrique sous la forme canonique :

$$\underbrace{\ddot{q} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{q} + \omega_0^2 q}_{OSCILLATEUR} = \underbrace{\frac{E}{L}cos(\omega t)}_{EXCITATEUR}$$

en introduisant :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \qquad \text{et} \qquad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$$

ω_0 est la pulsation propre et Q est le facteur de qualité (sans dimension). On a :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \text{et} \qquad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Remarque :

(i) L'équation obtenue est identique à celle obtenue pour le circuit libre. La différence est que le second membre n'est plus nul.

(ii) Dans ce problème, on dispose ainsi de 3 temps caractéristiques :

— la période propre ($T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$), qui mesure la période des oscillations sans dissipation,

— le temps de relaxation ($\tau = \frac{Q}{\omega_0}$), qui mesure la durée du régime transitoire,

— la période de l'excitation ($T = \frac{2\pi}{\omega}$).

1.B Solutions mathématiques

L'équation obtenue est une équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre avec second membre.

On admet que les solutions de cette équation s'écrivent comme la somme :

— d'une solution *générale* $q_0(t)$ de l'équation sans second membre (dite équation homogène) : $\ddot{q}+\frac{\omega_0}{Q}\dot{q}+\omega_0^2 q = 0$ Par exemple, dans le régime apériodique :

$$q_0(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + Be^{\frac{t}{\tau}}$$

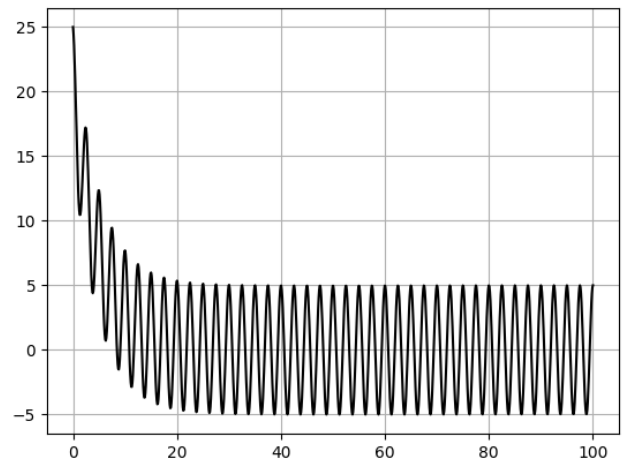
Il s'agit de la solution en régime libre.

— d'une solution *particulière* $q_1(t)$ de l'équation avec second membre de la forme :

$$q_1(t) = q_m \cos{(\omega t + \varphi)}$$

Dans le cas d'un régime apériodique, par exemple, on a donc :

$$q(t) = q_0(t) + q_1(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + Be^{\frac{t}{\tau}} + q_m \cos(\omega t + \varphi)$$



1.C Hypothèse et spécificité du régime établi

Quel que soit le régime (pseudo-périodique, apériodique ou critique), la solution générale de l'équation homogène s'estompe au-delà d'un temps caractéristique :

$$\tau = \frac{Q}{\omega_0} = \frac{R}{L}$$

Par conséquent, si on se place aux instants $t \gg \tau$, la solution de l'équation électrique est simplement :

$$q(t) = q_0(t) + q_1(t) \approx q_1(t) = q_m \cos(\omega t + \varphi)$$

pour une excitation de la forme :

$$e(t) = E\cos(\omega t)$$

On dit qu'on est dans le **régime permanent ou établi** et, qu'avant de l'atteindre, on se trouve dans le **régime transitoire**. Dans toute la suite, on se placera dans l'hypothèse qu'on a atteint le régime établi.

Conséquences

En régime établi, la réponse de l'oscillateur :

(1) ne dépend pas des conditions initiales.

Quelles que soient les conditions initiales imposées (charge et intensité initiales), l'oscillateur se comportera de façon identique au-delà de τ.

(2) possède la même fréquence que l'excitation.

C'est une propriété essentielle et immédiate des systèmes linéaires.

(3) ne diffère de l'excitation que par l'amplitude q_m et le déphasage φ.

Il s'agit donc de trouver ces deux inconnues du problème.

2. Analyse en fréquence de l'excitation

Désormais, on s'intéresse au problème physique suivant.

L'amplitude E de l'excitation étant fixée, comment se comporte le système lorsqu'on fait varier la fréquence ω de l'excitation sinusoïdale (ou harmonique) ? On s'intéressera tout particulièrement à la réponse du système en terme de charge $q(t)$ et d'intensité $i(t) = \dot{q}(t)$.

2.A Recours à la notation complexe

Afin de faciliter les calculs, on est amené à travailler avec la représentation complexe des grandeurs sinusoïdales, car les grandeurs complexes sont plus faciles à manipuler.

Ainsi, à l'excitation réelle de la forme $e(t) = E\cos\big(\omega t\big)$, on associe la grandeur complexe $\underline{e}(t) = Ee^{j\omega t}$, avec $j^2 = -1$. De même, on pose : $\underline{q}(t) = q_m e^{j(\omega t+\varphi)} = \underline{q}_m e^{j\omega t}$, où on a posé : $\underline{q}_m = q_m e^{j\varphi}$.

Dans ces formules, φ est la phase à l'origine des temps ($t = 0$) de $q(t)$, tandis que $\omega t + \varphi$ est la phase de $q(t)$.

$$\begin{tikzcd}
q(t) = q_m \cos(\omega t + \varphi) & \underline{q}(t) = q_m e^{j(\omega t+\varphi)} \arrow[l] \\
e(t) = E\cos(\omega t) \arrow[r] & \underline{e}(t) = Ee^{j\omega t} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Alors, en fin de calculs, pour revenir aux quantités réelles, il suffit d'appliquer la convention inverse.

Finalement, pour trouver $\underline{q}_m = q_m e^{j\varphi}$, il est nécessaire de trouver l'amplitude q_m et le déphasage φ, c'est-à-dire :

$$|\underline{q}_m| = |q_m e^{j\varphi}| = |q_m| \ |e^{j\varphi}| = q_m$$

$$\arg(\underline{q}_m) = \arg(q_m e^{j\varphi}) = \arg(q_m) + \arg(e^{j\varphi}) = \varphi$$

2.B Réponse en charge

Etudions la réponse en élongation $\underline{q}_m$ de l'oscillateur à une excitation $\underline{e}$.

Encadré 2 : Réponse en charge

On injecte $\underline{q} = q_m e^{j(\omega t+\varphi)} = \underline{q}_m e^{j\omega t}$ et $\underline{e} = E e^{j\omega t}$ dans l'équation :

$$\ddot{\underline{q}} + \frac{R}{L}\dot{\underline{q}} + \frac{\underline{q}}{LC} = \frac{\underline{e}}{L}$$

Puisque :

$$\dot{\underline{q}} = \frac{d}{dt}\left(q_m e^{j(\omega t+\varphi)}\right) = j\omega \ q_m e^{j(\omega t+\varphi)} = j\omega \ \underline{q}$$

$$\ddot{\underline{q}} = \frac{d^2}{dt^2}\left(q_m e^{j(\omega t+\varphi)}\right) = (j\omega)^2 \ q_m e^{j(\omega t+\varphi)} = (j\omega)^2 \ \underline{q}$$

Alors :

$$(j\omega)^2 \ \underline{q} + \frac{R}{L} j\omega \ \underline{q} + \frac{1}{LC}\underline{q} = \frac{\underline{E}}{L}$$

$$\left((j\omega)^2 \ + \frac{R}{L} j\omega \ + \frac{1}{LC}\right) \underline{q} = \frac{\underline{E}}{L}$$

D'où :

$$\underline{q} = \frac{\frac{\underline{E}}{L}}{\left((j\omega)^2 \ + \frac{R}{L} j\omega \ + \frac{1}{LC}\right)} = \frac{\frac{\underline{E}}{L}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega_0 \omega}{Q}}$$

En simplifiant par $e^{j\omega t}$ qui n'est jamais nul :

$$\underline{q}_m = \frac{\frac{E}{L}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega_0 \omega}{Q}}$$

A partir de l'expression complexe obtenue pour $\underline{q}_m$:

$$\underline{q}_m = \frac{\frac{E}{L}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega_0 \omega}{Q}}$$

on peut en déduire l'amplitude q_m et le déphasage φ.

Amplitude de la charge

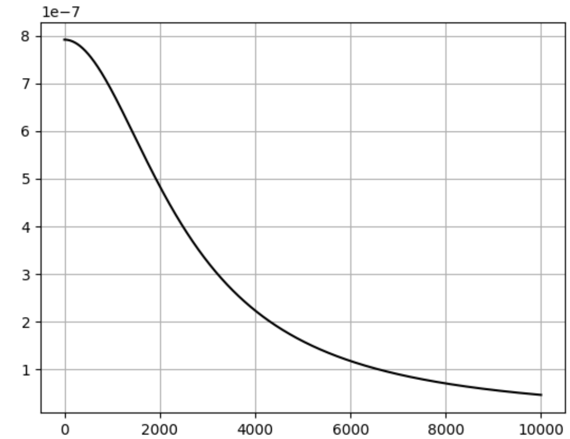
On détermine le module de $\underline{q}_m$: $q_m = |\underline{q}_m|$.

Encadré 3 : Amplitude de la charge

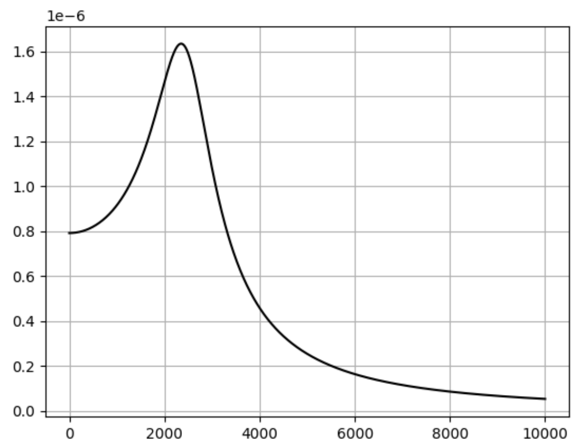
$$q_m = \left| \frac{\frac{E}{L}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega_0 \omega}{Q}} \right| = \frac{\frac{E}{L}}{|\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega_0 \omega}{Q}|} = \frac{\frac{E}{L}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_0 \omega}{Q}\right)^2}}$$

Ce module dépend bien de la fréquence de l'excitation. L'allure de l'amplitude de la charge q_m en fonction de la pulsation ω est fournie sur les graphiques suivants, pour deux valeurs différentes de Q :

$Q = \frac{1}{2}$



$Q = 2$



Déphasage de la charge

Pour obtenir le déphasage de la charge (par rapport à la phase de l'excitation), on détermine l'argument de $\underline{q}_m$.

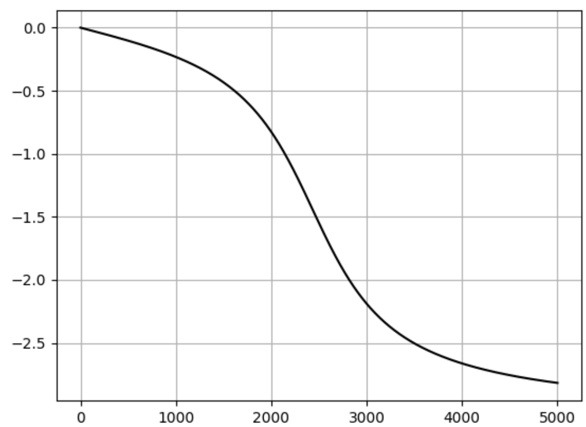
Encadré 4 : Déphasage de la charge

$$\begin{aligned}\varphi = \arg(\underline{q}_m) &= \arg\left(\frac{\frac{E}{L}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega_0\omega}{Q}}\right)\\ &= \arg\left(\frac{E}{L}\right) - \arg\left(\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega_0\omega}{Q}\right)\\ &= -\arg\left(\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega_0\omega}{Q}\right)\end{aligned}$$

La simplification de cette expression dépend du signe de $\omega_0^2 - \omega^2$:

$$\varphi = \begin{cases} -\arctan\left(\dfrac{\frac{\omega_0\omega}{Q}}{\omega_0^2 - \omega^2}\right), \text{ si } \omega_0^2 - \omega^2 > 0 \\ -\pi - \arctan\left(\dfrac{\frac{\omega_0\omega}{Q}}{\omega_0^2 - \omega^2}\right), \text{ si } \omega_0^2 - \omega^2 < 0 \end{cases}$$

Le déphasage dépend bien de la fréquence de l'excitation. L'allure de l'amplitude du déphasage φ de la charge par rapport à l'excitation en fonction de la pulsation ω est fournie sur le graphique suivant :



Formule de la réponse en charge

Des résultats obtenus précédemment, on peut déduire la réponse complexe de l'oscillateur en charge :

$$\underline{q}(t) = \begin{cases} \dfrac{\frac{E}{L}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_0\omega}{Q}\right)^2}} e^{j\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\frac{\omega_0\omega}{Q}}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\right)}, \text{ si } \omega_0^2 - \omega^2 > 0 \\ \dfrac{\frac{E}{L}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_0\omega}{Q}\right)^2}} e^{j\left(\omega t - \pi - \arctan\left(\frac{\frac{\omega_0\omega}{Q}}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\right)}, \text{ si } \omega_0^2 - \omega^2 < 0 \end{cases}$$

Finalement, la réponse réelle de l'oscillateur en charge s'écrit :

$$\text{Si } \omega < \omega_0 : q(t) = \frac{\frac{E}{L}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\left(\frac{\omega_0\omega}{Q}\right)^2}}\cos\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\frac{\omega_0\omega}{Q}}{\omega_0^2-\omega^2}\right)\right)$$

$$\text{Si } \omega > \omega_0 : q(t) = -\frac{\frac{F_m}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\left(\frac{\omega_0\omega}{Q}\right)^2}}\cos\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\frac{\omega_0\omega}{Q}}{\omega_0^2-\omega^2}\right)\right)$$

La réponse de l'oscillateur en charge se traduit par une modification de l'amplitude et de la phase, lesquelles dépend de ω et des paramètres (R, L, C).

2.C Réponse en intensité

Etudions la réponse en intensité $\underline{i} = \underline{i}_m e^{j(\omega+\psi)}$ d'un oscillateur à une excitation sinusoïdale $\underline{e}$.

Encadré 5 : Réponse en intensité

Avec $\underline{q} = \int \left(\underline{i}_m e^{j(\omega+\psi)}\right) dt = \dfrac{\underline{i}}{j\omega}$ $\quad \dot{\underline{q}} = i(t) \quad \ddot{\underline{q}} = \dfrac{d}{dt}\left(\underline{i}_m e^{j(\omega+\psi)}\right) = j\omega\underline{i}$

on peut réécrire l'équation $\ddot{\underline{q}} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{\underline{q}} + \omega_0^2\underline{q} = \dfrac{\underline{e}}{L}$ comme :

$$\left(j\omega + \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2\frac{1}{j\omega}\right)\underline{i} = \frac{\underline{e}}{L} \qquad \text{ou} \qquad \left(j\omega + \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2\frac{1}{j\omega}\right)\underline{i}_m = \frac{E}{L}$$

soit : $\underline{i}_m = \dfrac{\frac{E}{L}}{j\omega + \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2\frac{1}{j\omega}} = \dfrac{j\omega\frac{E}{L}}{(j\omega)^2 + j\omega\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2} = \dfrac{j\omega\frac{E}{L}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}}$

A partir de l'expression complexe obtenue pour $\underline{i}_m$, on peut en déduire l'amplitude v_m et le déphasage ψ.

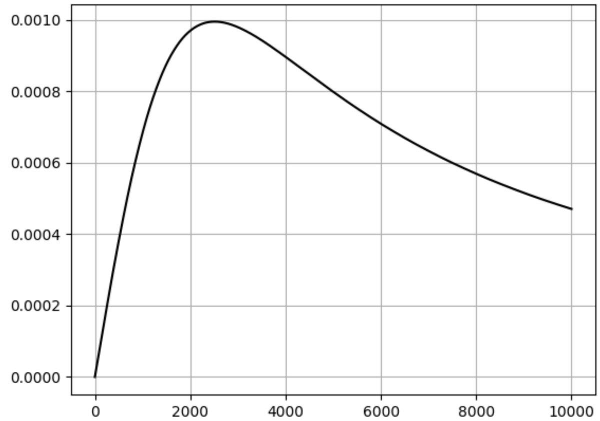
Amplitude de l'intensité

On détermine le module de $\underline{i}_m$: $i_m = |\underline{i}_m|$.

Encadré 6 : Amplitude de l'intensité

$$i_m = \left|\frac{j\omega\frac{E}{L}}{\omega_0^2-\omega^2+j\frac{\omega_0\omega}{Q}}\right| = \frac{\omega\frac{E}{L}}{|\omega_0^2-\omega^2+j\frac{\omega_0\omega}{Q}|} = \frac{\omega\frac{E}{L}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\left(\frac{\omega_0\omega}{Q}\right)^2}}$$

Ce module dépend bien de la fréquence de l'excitation. L'allure, quelle que soit la valeur de Q, est identique et fournie sur le graphique suivant :



Déphasage de l'intensité

On détermine l'argument de $\underline{i}_m$: $\psi = \arg(\underline{i}_m)$.

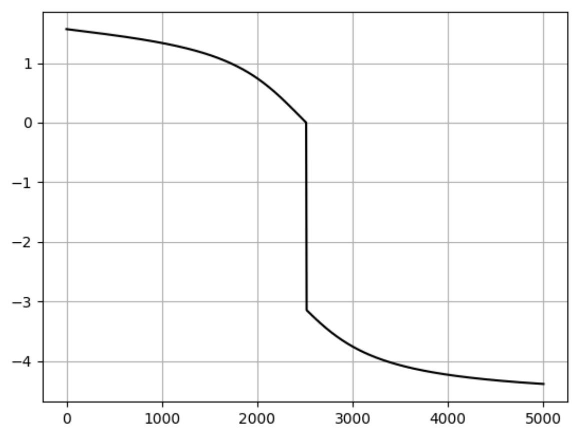
Encadré 7 : Déphasage de l'intensité

$$\psi = \arg\left(\frac{j\omega\frac{E}{L}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega_0\omega}{Q}}\right) = \arg\left(j\ \omega\frac{E}{L}\right) - \arg\left(\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega_0\omega}{Q}\right)$$
$$= \frac{\pi}{2} - \arg\left(\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega_0\omega}{Q}\right)$$

La simplification de cette expression dépend du signe de $\omega_0^2 - \omega^2$:

$$\psi = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{\frac{\omega_0\omega}{Q}}{\omega_0^2 - \omega^2}\right), & \text{si } \omega_0^2 - \omega^2 > 0 \text{ i.e. } \omega < \omega_0 \\ -\dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{\frac{\omega_0\omega}{Q}}{\omega_0^2 - \omega^2}\right), & \text{si } \omega_0^2 - \omega^2 < 0 \text{ i.e. } \omega > \omega_0 \end{cases}$$

Ce déphasage dépend bien de la fréquence de l'excitation. L'allure est fournie sur le graphique suivant :



Formule de la réponse en intensité

Des résultats obtenus précédemment, on peut déduire la réponse complexe de l'oscillateur en intensité :

$$\underline{i}(t) = \begin{cases} \dfrac{j\omega\frac{E}{L}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\left(\frac{\omega_0\omega}{Q}\right)^2}} e^{j\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\frac{\omega_0\omega}{Q}}{\omega_0^2-\omega^2}\right)\right)}, \text{ si } \omega_0^2-\omega^2>0 \\ \dfrac{-j\omega\frac{E}{L}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\left(\frac{\omega_0\omega}{Q}\right)^2}} e^{j\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\frac{\omega_0\omega}{Q}}{\omega_0^2-\omega^2}\right)\right)}, \text{ si } \omega_0^2-\omega^2<0 \end{cases}$$

Finalement, la réponse réelle de l'oscillateur en intensité s'écrit :

$$\text{Si } \omega < \omega_0 : i(t) = -\frac{\omega\frac{E}{L}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\left(\frac{\omega_0\omega}{Q}\right)^2}} \sin\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\frac{\omega_0\omega}{Q}}{\omega_0^2-\omega^2}\right)\right)$$

$$\text{Si } \omega > \omega_0 : i(t) = \frac{\omega\frac{E}{L}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\left(\frac{\omega_0\omega}{Q}\right)^2}} \sin\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\frac{\omega_0\omega}{Q}}{\omega_0^2-\omega^2}\right)\right)$$

La réponse de l'oscillateur en intensité se traduit par une modification de l'amplitude et de la phase, lesquelles dépendent de ω et des paramètres (R, L, C).

3. Phénomène de résonance

3.A Définition

Considérons un oscillateur électrique forcé par un excitateur sinusoïdal.

Encadré 8 : Définition

On dit qu'on a **résonance**, lorsque l'**amplitude** de l'une des grandeurs (charge, intensité, tension, puissance) de l'oscillateur devient maximale, pour une fréquence donnée et une amplitude fixée de l'excitateur.

Cette définition porte sur l'amplitude et non sur la phase de la grandeur.

L'allure des graphiques représentant l'amplitude q_m et i_m montre que, sous certaines conditions sur Q, il est possible d'avoir un maximal.

3.B Résonance en charge et en intensité

Recherchons les fréquences (ou pulsations) de résonance, lorsqu'elles existent.

Cas de la charge

Encadré 9 : Résonance en charge

L'amplitude $q_m = \dfrac{\frac{E}{L}}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}}$ est maximale, lorsque le dénominateur est minimal, c'est-à-dire lorsque :

$$h(\omega) = \left(\omega^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2$$

est minimal. Or :

$$\begin{aligned} h'(\omega) &= 2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\left(-2\omega\right) + 2\omega\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 \\ &= 4\omega\left(\frac{\omega_0^2}{2Q^2} - \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\right) \\ &= 4\omega\omega_0^2\left(\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)\right) \end{aligned}$$

D'où on déduit qu'il existe une pulsation de résonance en charge $\omega_{r,q} > 0$ qui vérifie $h'(\omega_{r,q}) = 0$:

$$\omega_{r,q} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

à condition que $2Q^2 > 1$ c'est-à-dire si :

$$Q > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Remarques :

(i) En toute rigueur, il conviendrait de vérifier qu'en $\omega_{r,q}$, ξ_m n'atteint pas seulement un extrémum, mais atteint bien un *minimum*, en montrant que

$$h''(\omega_{r,q}) > 0$$

(ii) On doit retenir qu'il n'y a pas toujours résonance en charge. En effet, si $Q < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, il n'y a pas de résonance en charge.

(iii) Le facteur de qualité influence aussi bien la pseudo-pulsation Ω que la pulsation de résonance $\omega_{r,q}$. Cependant, on remarquera que la valeur seuil n'est pas la même :

$$\Omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}} \qquad \text{si} \qquad Q > \frac{1}{2}$$
$$\omega_{r,q} = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}} \qquad \text{si} \qquad Q > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(iv) Si $Q \gg 1 > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, alors la pulsation de résonance s'identifie à la pulsation propre de l'oscillateur : $\omega_{r,q} \approx \omega_0$. C'est la dissipation (via Q), qui est responsable d'une pulsation de résonance plus faible que la pulsation propre $\omega_{r,e} < \omega_0$.

Cas de l'intensité

De façon analogue, on pourrait montrer qu'il y a toujours une résonance en intensité (c'est-à-dire pour toute valeur de Q), et qu'elle se produit pour : $\omega_{r,i} = \omega_0$.

3.C Aspects énergétiques

La résonance reflète une action d'efficacité extrême de l'excitateur sur l'oscillateur. Il est donc naturel de rechercher une interprétation plus universelle, sous la forme d'un transfert énergétique.

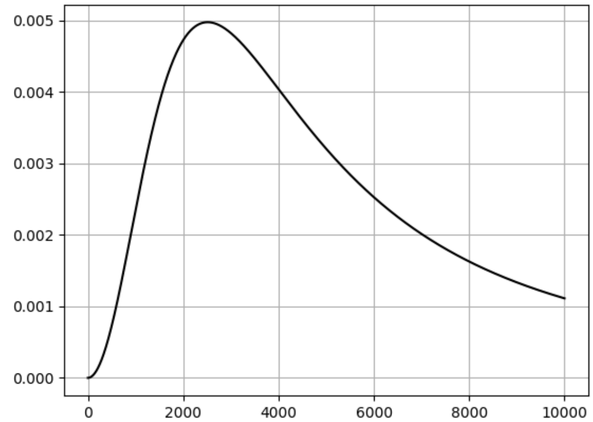
Dans la suite, on note $< f(t) >= \displaystyle\int_t^{t+T} f(t)\, dt$ la moyenne temporelle de la quantité $f(t)$, sur la période de l'excitation $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Encadré 10 : Puissance moyenne de l'excitation

Calculons la puissance moyenne (temporelle) fournie par l'excitateur :

$$\begin{aligned}
P_m &=< P(t) >=< e(t)\cdot i(t) >= \frac{1}{2}\Re(\underline{e}\cdot\underline{i}*)\\
&= \frac{1}{2}\Re\left(E\frac{-j\omega\frac{E}{L}}{\omega_0^2-\omega^2-j\frac{\omega\omega_0}{Q}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\Re\left(\frac{-j\omega\frac{E^2}{L}}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}\left(\omega_0^2-\omega^2+j\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)\right)\\
&= \frac{\frac{\omega^2\omega_0E^2}{2mQ}}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}
\end{aligned}$$

Cette puissance moyenne dépend bien de la fréquence de l'excitation. L'allure est fournie sur le graphique suivant :



On pourrait montrer qu'il y a toujours une résonance en puissance, et qu'elle se produit pour : $\omega_{r,p} = \omega_0$, quelle que soit la valeur de Q.

Bilan de puissance

Effectuons maintenant un bilan énergétique *en moyenne*, sur une période temporelle de l'excitation.

Encadré 11 : Bilan en puissance moyenne

A partir de l'équation électrique, exprimons la puissance instantanée, puis sa valeur moyenne :

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = e(t) \implies \big(L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C}\big) \cdot i(t) = e(t) \cdot i(t)$$

Or :

$$L\ddot{q} \cdot i(t) = L\frac{di}{dt}i(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) \text{ et } \frac{q}{C} \cdot i(t) = \frac{1}{C}q\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right)$$

sont de moyenne nulle, donc :

$$< Ri^2 > = < e(t) \cdot i(t) >$$

Ainsi, *en moyenne*, la puissance fournie par l'excitateur à l'oscillateur est intégralement dissipée par effet Joule dans la résistance ohmique.